

**CONSOLIDATION BUDGETAIRE OPTIMALE  
DANS LES MODELES  
MACROECONOMIQUES SIMPLES**

**Xavier Ragot**



## EDITORIAL BOARD

**Chair: Xavier Ragot** (Sciences Po, OFCE)

**Members: Jérôme Creel** (Sciences Po, OFCE), **Eric Heyer** (Sciences Po, OFCE), **Sarah Guillou** (Sciences Po, OFCE), **Xavier Timbeau** (Sciences Po, OFCE), **Anne Epaulard** (Sciences Po, OFCE).

## CONTACT US

OFCE  
10 place de Catalogne | 75014 Paris | France  
Tél. +33 1 44 18 54 24  
[www.ofce.fr](http://www.ofce.fr)

## WORKING PAPER CITATION

This Working Paper:  
Xavier Ragot  
Consolidation budgétaire optimale dans les modèles macroéconomiques simples  
*Sciences Po OFCE Working Paper*, n° 07/2026.  
Downloaded from URL: [www.ofce.sciences-po.fr/pdf/dtravail/WP2026-07.pdf](http://www.ofce.sciences-po.fr/pdf/dtravail/WP2026-07.pdf)  
DOI - ISSN

### ABOUT THE AUTHORS

Xavier Ragot, OFCE, Sciences Po-CNRS et CEPR  
Email Address: [xavier.ragot@sciencespo.fr](mailto:xavier.ragot@sciencespo.fr)

### ABSTRACT

This article develops a simple three-equation model of public debt dynamics. It derives the optimal fiscal policy for reducing public debt while minimizing the adverse effects on economic growth. The optimality criteria governing the debt adjustment path are discussed. Under fairly general conditions, an early fiscal consolidation (frontloading) is shown to be optimal.

### KEYWORDS

Public debt, fiscal policy, optimal policy.

### JEL Codes

E61, E62, H63.



# Consolidation budgétaire optimale dans les modèles macroéconomiques simples

Xavier Ragot, OFCE, Sciences Po-CNRS et CEPR

## Résumé

Cet article développe un modèle simple de la dynamique de la dette publique reposant sur trois équations. Le modèle permet de caractériser la trajectoire optimale d'une consolidation budgétaire visant à réduire le ratio dette publique sur PIB tout en minimisant les pertes d'activité économique à court terme. Différents critères d'optimalité sont étudiés et comparés. Dans un cadre linéaire standard, une stratégie de consolidation précoce (*frontloading*) apparaît optimale dans des conditions relativement générales. L'analyse met également en évidence le rôle décisif de l'écart entre le taux d'intérêt et le taux de croissance, ainsi que celui des multiplicateurs budgétaires, dans la détermination de la vitesse optimale d'ajustement des finances publiques.

**Mots-clés :** dette publique, consolidation budgétaire, multiplicateurs budgétaires, politique budgétaire optimale.

**Codes JEL :** E61, E62, H63.

L'évolution de la dette publique constitue l'une des questions centrales de la politique économique contemporaine. Les fortes hausses de dette observées à la suite de la crise financière mondiale de 2008, de la pandémie de Covid-19 et, plus récemment, des chocs

énergétiques ont ravivé les débats sur le rythme et les modalités de l'ajustement budgétaire. La question n'est plus seulement de savoir si la dette doit être stabilisée, mais également comment cette stabilisation doit être mise en œuvre afin de limiter ses effets négatifs sur l'activité économique.

L'analyse de la dette publique est complexe pour plusieurs raisons. Le déficit public dépend simultanément des décisions discrétionnaires des gouvernements et de la conjoncture économique. En retour, les variations du déficit affectent elles-mêmes l'activité à travers les multiplicateurs budgétaires. Enfin, la dynamique du ratio dette publique sur PIB dépend non seulement du déficit primaire mais également de l'écart entre le taux d'intérêt payé sur la dette et le taux de croissance nominale de l'économie. Ces interactions rendent délicate la détermination d'une trajectoire optimale de consolidation budgétaire.

Cet article s'intéresse à cette question dans le cadre des modèles macroéconomiques simples de politique budgétaire. Ces modèles reposent sur une des formes réduites, sans expliciter les micro-fondations de certaines relations économiques. Ils occupent une place particulière dans l'analyse économique appliquée. Contrairement aux modèles d'équilibre général à anticipations rationnelles, ils reposent sur des relations comportementales estimées économétriquement et permettent une description détaillée des recettes publiques, des dépenses publiques et des stabilisateurs automatiques. Cette approche les rend particulièrement adaptés à l'évaluation des politiques budgétaires de court et moyen termes.

Depuis les années 1950, ces modèles constituent l'outil principal de prévision et de simulation budgétaire des administrations publiques et des instituts de conjoncture, fruit de la modélisation des analyses de Keynes, validées par les estimations économétriques. Ils sont aujourd'hui utilisés, sous différentes formes, par les ministères des finances, les banques centrales, les organisations internationales et les instituts de recherche. Ils constituent notamment le socle méthodologique de nombreux exercices de simulation budgétaire récents, tels que ceux présentés par Timbeau et al. (2022) ou Auclert et al. (2024). Une présentation classique de cette tradition de modélisation peut être trouvée

dans Bodkin et al. (1991).

Paradoxalement, alors même qu'ils jouent un rôle central dans l'élaboration des politiques publiques, ces modèles ont reçu relativement peu d'attention dans la littérature récente. Les débats académiques se sont principalement concentrés sur les modèles néokeynésiens dynamiques d'équilibre général. Pourtant, les modèles keynésiens traditionnels continuent de fournir un cadre particulièrement transparent pour étudier les effets macroéconomiques des consolidations budgétaires et la dynamique de la dette publique.

L'article contribue à cette littérature en développant un modèle volontairement simple composé de trois équations. Deux équations décrivent les contraintes comptables des finances publiques : la dynamique de la dette et le lien entre les instruments budgétaires et le solde primaire. La troisième résume les effets de court terme de la politique budgétaire sur l'activité économique à travers un multiplicateur budgétaire réduit. Cette structure permet d'obtenir des résultats analytiques simples concernant le profil temporel optimal d'une consolidation budgétaire.

Notre analyse s'inscrit dans une littérature plus large consacrée aux multiplicateurs budgétaires et aux effets macroéconomiques des ajustements fiscaux. Les travaux empiriques récents montrent que les multiplicateurs peuvent être substantiels, en particulier dans les périodes de faible activité ou lorsque la politique monétaire est contrainte (Blanchard and Leigh, 2013; Auerbach and Gorodnichenko, 2012; Christiano et al., 2011). D'autres contributions soulignent que les consolidations budgétaires peuvent avoir des effets persistants sur l'activité économique (Fatas and Summers, 2018). Enfin, les débats récents sur la soutenabilité de la dette publique ont mis en évidence l'importance de l'écart entre le taux d'intérêt et le taux de croissance dans l'évaluation des coûts de la dette (Blanchard, 2019a).

Le reste de l'article est organisé comme suit. Le paragraphe suivant est une revue rapide de la littérature. La section suivante présente le modèle de base. Les sections suivantes caractérisent la trajectoire optimale de consolidation budgétaire selon différents critères

normatifs, étudient le rôle de l'écart entre taux d'intérêt et croissance, puis proposent plusieurs simulations quantitatives. Une dernière section conclut.

### **La modélisations des finances publiques en macroéconomie**

Le premier type de modèle rassemble les modèles récents de finances publiques avec des prix flexibles, développés à partir de la fin des années 1970, qui se concentrent sur les effets économiques des impôts et de leurs anticipations rationnelles. Ces modèles reposent sur des prix flexibles et sont donc muets quant au rôle de la politique monétaire et de l'inflation. Un exemple fameux est la contribution de Barro (1974) qui aboutit à la conclusion que le niveau de la dette publique n'a pas d'effet important sur l'activité économique, ce que l'on appelle l'équivalence Ricardienne, en référence à David Ricardo, qui aurait formulé cette affirmation. Le papier est généralisé dans une approche néoclassique par Baxter and King (1993). Les contributions plus récentes modélisant l'hétérogénéité des agents de manière plus réalistes mais conservant les prix flexibles, comme Aiyagari and McGrattan (1998) ou LeGrand and Ragot (2025) qui incluent des références aux travaux actuels, nuancent ces résultats, mais trouvent des effets faibles du niveau de long terme de la dette publique sur l'activité économique. En effet, les taux d'épargne augmentent en même temps que la dette publique, ce qui fait l'investissement des entreprises et l'activité économique ne décroissent pas.

Le deuxième type de modèle est la littérature récente, néo-keynésienne, qui introduit une dynamique de l'inflation plus réaliste, en introduisant une courbe de Phillips néo-keynésienne faisant jouer un rôle à la politique monétaire. Ces modèles qualifiés de DSGE (Dynamic Stochastic General Equilibrium) pour les plus simples (voir Wu and Xie (2025) pour une contribution récente et des références) ou de HANK (Heterogeneous-Agent New-Keynesian Model) pour les plus élaborés reposent sur des anticipations rationnelles (Kaplan et al. (2018), LeGrand et al. (2024), Auclert et al. (2025b)), qui sont toujours en débat Auclert et al. (2025a) ou Rudd and Whelan (2007) pour une critique ancienne et toujours d'actualité.

# 1 Le modèle simple

Le modèle simple repose sur trois équations. La première équation est dérivée de la contrainte budgétaire du gouvernement, qui stipule que la dette publique nominale évolue en fonction du solde budgétaire  $S_t$ . Dans le débat public, il est plus fréquent de faire référence au déficit public, qui est l'opposé du solde :  $-S_t$ . La dette publique en euro à l'année  $t$ ,  $D_t$ , décroît avec le solde public :  $D_t = D_{t-1} - S_t$ . Le déficit de l'année  $t$  est le paiement des charges d'intérêt sur la dette passée  $r_t D_{t-1}$ , où  $r_t$  est le taux d'intérêt nominal annuel apparent sur la dette publique, et du surplus net des charges d'intérêt, appelé solde primaire  $SP_t$ . Ainsi,  $S_t = SP_t - r_t D_{t-1}$ .

On peut donc écrire

$$D_t = D_{t-1} + \underbrace{r_t D_{t-1} - SP_t}_{\text{Déficit public}}, \quad (1)$$

L'activité économique peut affecter le solde primaire. En effet, en récession, les recettes fiscales diminuent et les dépenses de chômage augmentent, réduisant le solde primaire. On appelle solde structurel primaire ou  $SPS_t$  la valeur du solde primaire nominal de l'année  $t$  si l'économie fonctionne à son potentiel (c'est-à-dire le PIB est égal au PIB correspondant au plein emploi des facteurs de production,  $PIB^{pot}$ ). Le  $SPS_t$  corrige le déficit primaire des fluctuations conjoncturelles.

On note  $d_t$  la dette publique ramenée au PIB potentiel ( $d_t = D_t/PIB_t^{pot}$ ) et  $sps_t$  le surplus structurel primaire ramené au PIB potentiel ( $sps_t = SPS_t/PIB_t^{pot}$ ).

L'écart de production (ou *output gap* en anglais) est la différence entre l'activité observée et l'activité potentielle. On définit  $OG_t = \frac{PIB_t - PIB_t^{pot}}{PIB_t^{pot}}$ . Un output gap de 2%, signifie que l'économie fonctionne à 2% au dessus de son potentiel. Un  $OG_t$  négatif, signifie que l'activité est trop faible et donc le chômage trop important. Tous ces éléments sont des définitions. Introduisons maintenant des mécanismes économiques.

Lorsque l'activité est faible, c'est-à-dire qu'elle est en deçà de son potentiel et donc

$OG_t < 0$ , alors les recettes fiscales sont faibles car moins d'impôts sont prélevés. On note  $\epsilon$  l'élasticité des recettes fiscales à l'activité économique. En France, typiquement  $\epsilon = 0,5$  qui est le taux moyen de prélèvement obligatoires.

A partir de l'équation (1), on peut facilement déduire la dynamique de la dette rapportée au PIB,  $d_t$ . Le détail de la dérivation est présenté appendice A. On obtient

$$d_t - d_{t-1} = \frac{r - g}{1 + g} d_{t-1} - sps_t - \epsilon \times OG_t$$

où,  $r$  est le taux d'intérêt nominal apparent sur la dette publique (supposé ici constant) et  $g$  le taux de croissance nominale de l'économie. Si l'économie croît à 1% en termes réels et si l'inflation est 2%, alors  $g = 3\%$ .

Cette première équation est donc l'évolution de la dette publique en fonction de l'activité économique et de la politique fiscale, résumée par le surplus structurel primaire.

La seconde équation représente l'effet des choix de politique fiscale. La politique fiscale est le choix des recettes et dépenses par le gouvernement. Les hausses d'impôt ou les baisses de dépenses augmentent de manière permanente le surplus structurel primaire (et inversement pour les baisses d'impôts et hausses des dépenses publiques). Ces choix sont appelés Impulsion Budgétaires, ou  $IB_t$ . Pour des raisons qui seront claires plus loin, une impulsion budgétaire positive est une baisse d'impôt ou une hausse des dépenses. Une  $IB_t$  négative (hausse d'impôts ou baisses de dépenses) signifie que le surplus primaire augmente. On a donc

$$sps_t - sps_{t-1} = -IB_t,$$

où l' $IB_t$  est l'impulsion budgétaire rapportée au PIB potentiel.

La troisième équation décrit de manière compacte l'effet de la politique fiscale sur l'activité économique : La politique fiscale a un effet sur l'activité, du fait des multiplicateurs budgétaires. Une hausse d'impôt ou une baisse de dépenses réduit transitoirement l'activité d'une fraction  $m$ . L'effet sur l'activité est mesurée par l'écart entre la production de

l'économie et son potentiel, c'est-à-dire l'output gap. Une réduction de l'activité est donc un output gap négatif (l'économie fonctionne en deçà de son potentiel). Une économie en surchauffe est caractérisée par un output gap positif. La valeur de  $m$  est la valeur du multiplicateur d'activité, qui fait l'objet de nombreuses analyses. Il est traditionnellement compris entre .5 et 1.2. La valeur précises de ce multiplicateur dépend des mesures considérées et des ménages et entreprises concernées. Dans ce modèle simple, on considère une valeur moyenne unique.

Enfin, en cas d'une réduction de l'activité l'économie revient à l'équilibre à un rythme  $\rho$ , qui résume les rigidités nominales et réelles dans l'économie. Une économie rigide à un  $\rho$  élevé. On a donc une évolution de l'output gap qui est

$$OG_t = \rho OG_{t-1} + m \times IB_t$$

## Le modèle à trois équations

Le modèle simple peut donc être écrit :

$$\begin{aligned} sps_t - sps_{t-1} &= -IB_t \\ d_t - d_{t-1} &= \frac{r-g}{1+g} d_{t-1} - sps_t - \epsilon \times OG_t \\ OG_t &= \rho OG_{t-1} + m \times IB_t \end{aligned}$$

La dynamique d'une économie est la donnée initiale d'un output gap et du surplus et de la dette  $OG_0, sps_0, d_0$ , ainsi qu'une séquence d'impulsions budgétaires  $IB_t$  qui détermine la séquence des surplus primaires, dettes publiques et output gap  $(sps_t, d_t, OG_t)$ . Ce modèle peut facilement être simulé, avec des outils très simples, comme un tableur Excel par exemple.

**Un cas simple** L'on peut prendre un cas encore plus simple où  $r = g$ , et  $\epsilon = \rho = 0$ . L'hypothèse  $r = g$  est raisonnable aux vues des données historiques (Auclert et al. (2024)). L'hypothèse  $\epsilon = 0$  est une simplification importante. En effet, dans le cas français, les estimations empiriques sont  $\epsilon = 0,5$ . Enfin, l'hypothèse  $\rho = 0$  est aussi une simplification, car dans les données, on trouve plutôt  $\rho = 0,5$  sur données annuelles.

Dans ce cas simple, on trouve les équations suivantes. Pour une variable  $x_t$ , on note  $\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$

$$\Delta sps_t = -IB_t$$

$$\Delta d_t = -sps_t$$

$$OG_t = m \times IB_t$$

Ce modèle simple montre que d'une part l'OG est un simple multiplicateur de l'IB. Ensuite, on trouve simplement  $\Delta^2 d_t = IB_t$ . En d'autres termes, les choix budgétaires discrétionnaires (l'IB) sont ici la variation de la variation de la dette, c'est-à-dire ils sont l'accélération de la dette. Cette propriété est essentielle : les choix budgétaires (IB) n'affectent pas le niveau de la dette publique ou son accroissement mais l'accélération de la dette publique. En général, une IB nulle ne correspond pas à une dette stable, mais à une dette qui croît ou décroît continument car dans ce cas le surplus structurel primaire est constant car  $\Delta sps = 0$ . et la variation de la dette est  $\Delta d = sps$ . Pour stabiliser la dette, il faut viser un surplus structurel nul.

## Optimalité de la consolidation

La question étudiée dans cet article est la séquence optimale d'impulsions budgétaires  $IB_t$  afin d'atteindre une cible de surplus primaire à une période  $T$ ,  $sps_T$ . Ce problème inclus de nombreux cas intéressant, comme la stabilisation de la dette ou encore la décroissance

régulière de la dette, comme dans les engagements européens.

Pour considérer le cas intéressant (avec  $\epsilon > 0, \rho > 0$ ), on considère que  $sps_0 < 0$  et que le surplus structurel primaire cible est positif  $sps_c \geq 0$  et est supposé atteint de  $T$  périodes  $sps_T = sps_c$ . On fait l'hypothèse  $sps_c \geq 0$  afin que la dette publique soit placée sur une trajectoire constante ou décroissante.

Ainsi et par construction, on cherche le meilleur sentier des  $IB_t$  pour atteindre une variation du déficit total  $\Delta^{tot}$  et

$$\Delta^{tot} := -sps_c + sps_0 < 0$$

et comme  $sps_t - sps_{t-1} = -IB_t$  on doit avoir  $sps_0 - \sum_{k=1}^T IB_k = sps_c$ .

$$\sum_{k=1}^T IB_k = \Delta^{tot} < 0$$

et  $IB_t = 0$  pour  $t \geq T + 1$ .

Rappelons, qu'une  $IB_t$  négative est une hausse d'impôt ou une baisse des dépenses. La somme des IB étant négative, il s'agit d'une consolidation fiscale.

## Un effet croissant avec l'horizon

Avant de discuter la politique optimale, la Proposition suivante caractérise l'effet de l' $IB_t$  (c'est à dire des politiques fiscales discrétionnaires) a différents horizons.

**Proposition 1** *Si  $r = g$ , l'effet de l'IB contemporain sur la dette publique augmente dans le temps :*

$$\frac{\partial d_{t+k}}{\partial IB_t} = k + 1 - \epsilon \frac{m}{1 - \rho} (1 - \rho^{k+1}) \simeq 1 + k$$

L'hypothèse  $r = g$  est introduite pour obtenir des expressions simples et ne détermine pas le résultat. Cette proposition montre que l'effet dans le temps de l'IB sur la dette publique à une période  $t$  donnée croît linéairement, environ, au cours du temps.

Ce résultat d'abord comptable est important. Un effort de consolidation, en changeant la trajectoire de la dette, change la direction de cette dernière (et non le niveau). Ce changement de direction conduit à une hausse ou une baisse de la dette qui se cumule dans le temps. Ainsi, l'effet de l'IB augmente au court tu temps. Ce résultat explique que les pays qui font des consolidation importantes ont d'abord des effet faibles sur la réduction de la dette, puis des effet qui croissent dans le temps. Comme le montre l'exemple de l'Espagne ou du Portugal, un effort de consolidation mené dans les année 2015 place progressivement la trajectoire de la dette sur une pente décroissante qui s'affirme en 2025, soit dix ans après.

## 2 Quelle définition de l'optimalité de la politique budgétaire ?

Contrairement aux modèles dynamiques d'équilibre général entièrement microfondés, le modèle présenté ici ne permet pas de dériver directement une fonction de bien-être social à partir des préférences des agents. Le choix de l'objectif de politique économique doit donc être introduit de manière explicite.

Cette caractéristique est parfois présentée comme une faiblesse des modèles macroéconomiques keynésiens traditionnels. Elle peut également être interprétée comme une force. En effet, elle permet d'étudier plusieurs objectifs de politique économique sans imposer une représentation particulière des préférences sociales. Le même cadre analytique peut ainsi être utilisé pour analyser différents arbitrages entre activité économique et soutenabilité des finances publiques.

Afin de simplifier l'exposé, on suppose dans toute cette section que l'économie se trouve en situation de sous-emploi, de sorte que  $OG_t \leq 0$ .

Nous considérons trois critères d'optimalité correspondant à trois préoccupations fréquemment rencontrées dans le débat de politique économique.

### 1. Le critère d'activité économique

Le premier critère consiste à minimiser la perte cumulée d'activité associée à la consolidation budgétaire. Il correspond à une vision dans laquelle le principal coût de l'ajustement budgétaire provient de ses effets récessifs sur la production et l'emploi. L'objectif du gouvernement est alors de maximiser la somme des output gaps sur l'ensemble de la période :

$$\max_{\{IB_t\}_{t \geq 0}} \sum_{t=0}^{\infty} OG_t$$

Comme l'output gap est négatif en situation de sous-emploi, cet objectif revient à minimiser la perte cumulée de PIB.

### 2. Le critère de soutenabilité de la dette

Le deuxième critère accorde une priorité à la stabilisation des finances publiques. Le gouvernement cherche à limiter l'augmentation maximale du ratio de dette observée pendant la phase de consolidation.

L'objectif devient alors :

$$\min_{\{IB_t\}_{t \geq 0}} \max_{t \geq 0} b_t$$

Ce critère reflète les préoccupations liées à la crédibilité budgétaire, au respect de règles fiscales ou à la perception des marchés financiers.

### 3. Le critère mixte

Enfin, la littérature récente privilégie souvent des fonctions de perte combinant stabilisation macroéconomique et soutenabilité budgétaire. Dans cet esprit, nous retenons le critère suivant, proche de celui utilisé par Auclert et al. (2024) :

$$\min_{\{IB_t\}_{t \geq 0}} \sum_{t=0}^{\infty} OG_t^2 + 2\kappa b_T$$

Le premier terme pénalise les fluctuations d'activité tandis que le second reflète la volonté de réduire la dette publique à l'horizon (T).

Le paramètre  $\kappa \geq 0$  mesure l'importance relative accordée à la dette. Lorsque  $\kappa = 0$ , le gouvernement se préoccupe exclusivement de stabilisation macroéconomique. À l'inverse, lorsque  $\kappa$  augmente, la réduction de la dette devient progressivement prioritaire.

Ces trois objectifs correspondent à des visions différentes de la politique budgétaire. Le premier met l'accent sur la stabilisation de l'activité, le second sur la discipline budgétaire et le troisième sur l'arbitrage entre ces deux dimensions. Leur comparaison permet de mieux comprendre les mécanismes du modèle.

Les démonstrations des résultats présentés ci-dessous sont reportées en annexe.

### 3 Consolidation optimale

Dans cette section on considère  $r = g$ , de sorte que la dynamique de la dette est simplement  $d_t = d_{t-1} - sps_t - \epsilon \times OG_t$ . Cette hypothèse semble réaliste à la fois sur données américaines (voir Blanchard (2019b) et Auclert et al. (2024) pour la France)

#### 3.1 Critère du PIB

La première proposition considère le critère du PIB.

**Proposition 2** *La variation du PIB sur la période est indépendante du profil de consolidation*

$$\sum_{t=1}^{\infty} OG_t = \frac{m\Delta^{tot} + \rho OG_0}{1 - \rho}$$

Ce résultat constitue une propriété remarquable du modèle. Lorsque ( $r=g$ ), la perte cumulée d'activité dépend uniquement du montant total de consolidation budgétaire et non de son profil temporel.

L'intuition est simple. Dans un système linéaire, les effets dynamiques des différentes impulsions budgétaires s'additionnent sans interaction. Une consolidation précoce génère

une récession plus forte à court terme mais permet une reprise plus rapide ensuite. À l'inverse, une consolidation graduelle limite la récession initiale mais prolonge la période de faible activité. Ces deux effets se compensent exactement.

Ainsi, un gouvernement dont le seul objectif serait de maximiser le PIB cumulé sur l'ensemble de la période est indifférent entre une stratégie de *frontloading* et une stratégie de consolidation graduelle.

### 3.2 Critère de la dette

Lorsque l'on considère la volonté de limiter la hausse de la dette, le résultat est différent, comme le montre la Proposition suivante.

**Proposition 3** *Un gouvernement qui veut minimiser la hausse de la dette, réalise un frontloading intégral :  $IB_1 = \Delta^{tot}$  et  $IB_t = 0$  pour  $t \geq 2$ . On a  $OG_1 = \rho OG_0 + m\Delta^{tot}$ , et la dette publique est*

$$d_t = d_0 - t \times sps_c - \epsilon OG_1 \frac{1 - \rho^t}{1 - \rho}$$

Le résultat est radicalement différent lorsque l'objectif est de limiter la hausse de la dette publique.

Dans ce cas, toute consolidation retardée laisse la dette augmenter pendant une période supplémentaire avant que les effets de l'ajustement budgétaire ne se matérialisent. Il est donc optimal de concentrer l'intégralité de l'effort budgétaire dès la première période.

Le *frontloading* apparaît ainsi comme la stratégie optimale du point de vue exclusif de la dette. Cette stratégie présente toutefois un coût macroéconomique important puisqu'elle provoque une forte dégradation initiale de l'activité avant un retour progressif vers l'équilibre à la vitesse  $\rho$ .

Ce résultat met en évidence le conflit fondamental entre stabilisation macroéconomique et consolidation budgétaire. Une politique optimale du point de vue de la dette n'est généralement pas optimale du point de vue de l'activité économique.

### 3.3 Critère mixte

Enfin, le critère mixte de fluctuation de l'activité aboutit au résultat suivant. On fournit ensuite l'interprétation économique.

**Proposition 4** *La politique optimale est choisit des OG monotones entre 1 et  $T - 1$ , qui correspondent aux impulsions.*

$$OG_t = \bar{OG} + \kappa \frac{1 - \rho}{m} t \quad (2)$$

où  $A_1$  est une constante négative et  $OG_T = (1 - \rho^2) \lambda - (1 - \rho^2) \kappa \left( \frac{1}{m} - \epsilon \right)$ .

L'interprétation de résultat est le suivant. Considérons tout d'abord le cas où le critère de la dette ne joue pas, c'est-à-dire supposons  $\kappa = 0$ . Dès lors, l'équation (2) implique que l'output gap optimal sur la période est négatif et constant  $OG_t \equiv \bar{OG}$  pour  $t = 1, \dots, T - 1$ .

Ensuite, si le critère de la dette est positive,  $\kappa > 0$ , l'OG est négatif et linéairement croissant au cours du temps, à un rythme  $\kappa \frac{1 - \rho}{m}$  (c'est-à-dire de moins en moins négatif au cours du temps). C'est l'expression d'un ajustement initial plus important (*frontloading*), et qui est d'autant plus important que le critère de la dette est élevé  $\kappa$ .

Dans tous les cas, les impulsions budgétaires se déduisent de l'égalité comptable, pour tout  $t$ .

$$IB_t = \frac{1}{m} OG_t - \frac{\rho}{m} OG_{t-1}, t \geq 1$$

On donne en Annexe F l'expression analytique des IBs.

## 4 Economie où $r$ est différent de $g$

On trouve alors le résultat suivant.

**Proposition 5** *La politique optimale choisit des OG monotones entre 1 et  $T - 1$ , qui correspondent aux impulsions.*

$$OG_t \simeq A_2 + \kappa Bt$$

où  $A_2$  est une constante et  $B \geq 0$ .

Les expressions analytiques sont plus complexes et dérivées dans l'Annexe G. On trouve aussi un output gap négatif et croissant (*frontloading*). La valeur des instrument est encore déterminée par la relation

$$IB_t = \frac{1}{m}OG_t - \frac{\rho}{m}OG_{t-1}$$

Ces résultats sont utilisés pour les simulations suivantes.

## 5 Quelle est la durée optimale d'ajustement ?

Les résultats précédents supposent que l'horizon de consolidation ( $T$ ) est donné. En pratique, cet horizon constitue lui-même une décision de politique économique. Les gouvernements doivent en effet déterminer non seulement l'ampleur de l'ajustement budgétaire mais également la vitesse à laquelle celui-ci doit être mis en œuvre.

L'analyse des sections précédentes permet déjà de dégager plusieurs enseignements. Pour un gouvernement dont l'objectif principal est la réduction de la dette publique, la réponse est immédiate : l'ajustement doit être réalisé aussi rapidement que possible. La stratégie optimale correspond alors à un *frontloading* maximal, qui modifie dès les premières périodes la trajectoire de la dette.

À l'inverse, un gouvernement qui ne se préoccupe que de la perte cumulée de PIB est indifférent quant à la durée de l'ajustement. Comme l'a montré la Proposition 2, la perte cumulée d'activité dépend uniquement du montant total de consolidation et non de son

profil temporel.

La question devient plus intéressante lorsque le gouvernement poursuit simultanément des objectifs de stabilisation macroéconomique et de soutenabilité budgétaire. Dans ce cas, la durée optimale de l'ajustement résulte d'un arbitrage entre deux effets opposés.

D'une part, un horizon plus long permet de répartir l'effort budgétaire sur davantage de périodes. La baisse d'activité est alors moins marquée à court terme et les fluctuations macroéconomiques sont réduites. Cet argument plaide en faveur d'une consolidation graduelle.

D'autre part, un ajustement plus lent implique que la dette publique demeure plus élevée pendant une période prolongée. Le niveau maximal de dette augmente, tout comme les charges d'intérêt associées. Cet argument favorise au contraire une consolidation plus rapide.

Le choix de l'horizon optimal dépend donc du poids relatif accordé à ces deux objectifs. Plus le gouvernement attache d'importance à la réduction de la dette, plus l'horizon optimal est court. À l'inverse, une plus grande importance accordée à la stabilisation de l'activité conduit à étaler davantage l'ajustement dans le temps.

Cette question est particulièrement pertinente dans le contexte des nouvelles règles budgétaires européennes. Celles-ci reposent précisément sur l'idée qu'un ajustement plus progressif peut permettre de concilier la réduction de la dette publique avec la préservation de l'activité économique. Le modèle présenté ici fournit un cadre simple permettant d'analyser formellement cet arbitrage.

La section suivante illustre quantitativement ces mécanismes à l'aide de simulations calibrées.

## 6 Une simulation

Afin de montrer les trajectoires optimales de la dette et de l'activité, on réalise une simulation calibrée sur données françaises.

On prend  $m = .45$ ,  $\rho = 0.7$ ,  $\epsilon = 0.52$ ,  $r = g = 3\%$ . De sorte que le multiplicateur cumulé est  $m/(1 - \rho) = 1.5$ . Ensuite, les conditions initiales sont  $OG_0 = -0.7\%$ ,  $sps_0 = -3\%$ ,  $sps_c = 0.5\%$  et  $d_0 = 110\%$ . On considère trois horizons de consolidation, 8, 10 et 12 ans, dont les conséquences sont montrées dans les trois figures suivantes.

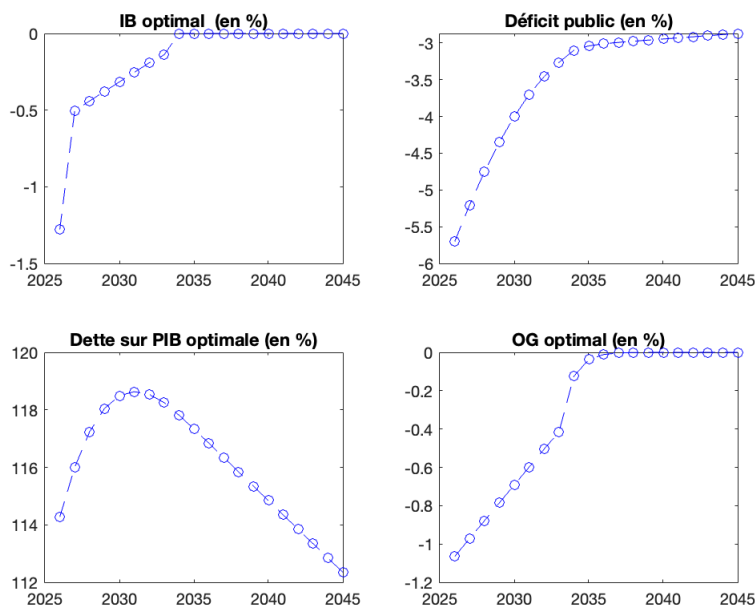


FIGURE 1 – Consolidation optimale  $T = 8$ ,  $\kappa = 0.14\%$

## 7 Conclusion

Cet article développe un modèle keynésien simple permettant d'analyser la trajectoire optimale d'une consolidation budgétaire destinée à réduire le ratio de dette publique. Le cadre retenu repose sur trois équations décrivant respectivement la dynamique de l'activité économique, le solde primaire structurel et l'évolution de la dette publique. Cette

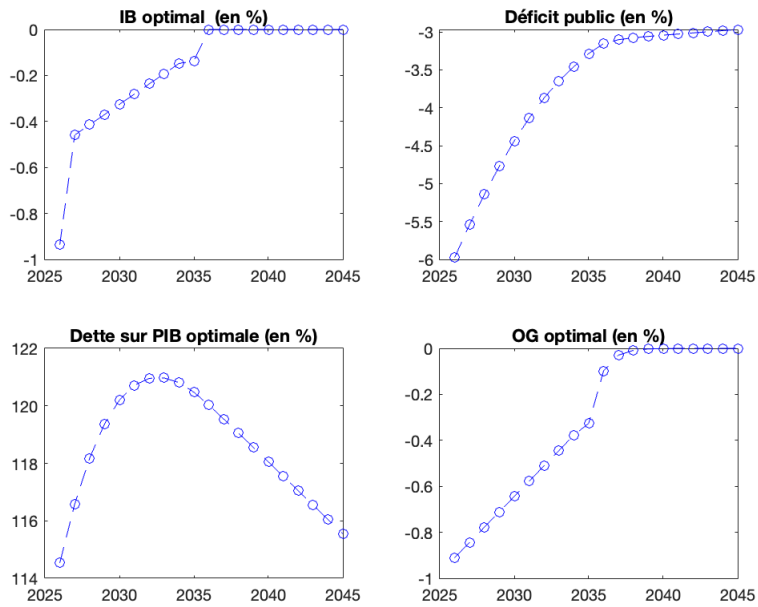


FIGURE 2 – Consolidation optimale  $T = 10$  ,  $\kappa = 0.1\%$

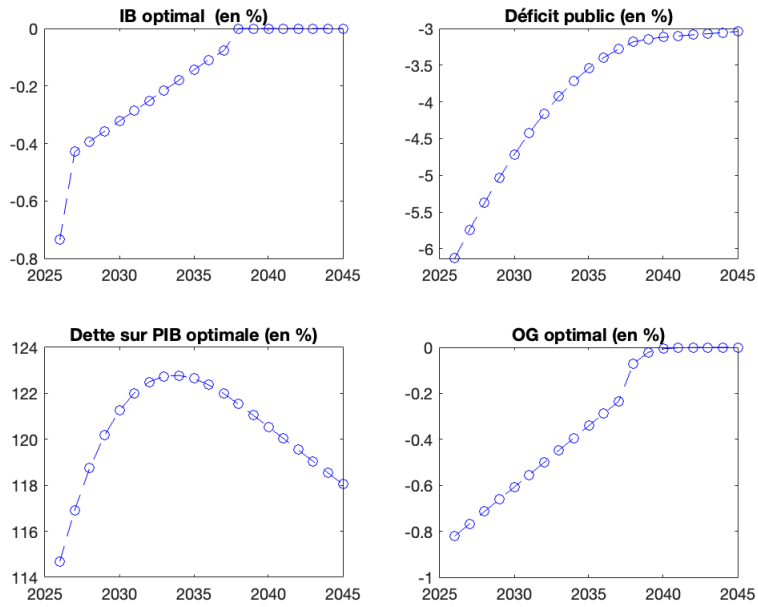


FIGURE 3 – Consolidation optimale  $T = 12$  ,  $\kappa = 0.08\%$

représentation volontairement parcimonieuse permet d'isoler les principaux mécanismes économiques à l'œuvre tout en conservant une grande transparence analytique.

Le modèle met en évidence plusieurs résultats robustes. Premièrement, lorsque le taux d'intérêt est égal au taux de croissance, la perte cumulée d'activité associée à une consolidation budgétaire dépend uniquement du montant total de l'ajustement et non de son profil temporel. Une stratégie de *frontloading* et une stratégie graduelle produisent ainsi la même perte cumulée de PIB dans le cadre du modèle.

Deuxièmement, lorsqu'un gouvernement cherche à limiter la hausse de la dette publique, il est optimal de concentrer l'effort budgétaire dès le début de la période d'ajustement. Le *frontloading* permet en effet de modifier rapidement la trajectoire de la dette, au prix d'une dégradation plus marquée de l'activité à court terme.

Troisièmement, lorsqu'on introduit simultanément des objectifs de stabilisation macroéconomique et de soutenabilité budgétaire, la politique optimale résulte d'un arbitrage entre ces deux dimensions. Plus l'objectif de réduction de la dette est important, plus l'ajustement initial est élevé. À l'inverse, une plus grande importance accordée à la stabilisation de l'activité conduit à répartir davantage l'effort budgétaire dans le temps.

Ces résultats offrent une interprétation simple de nombreux débats contemporains sur les politiques de consolidation budgétaire. Ils suggèrent que les désaccords observés entre économistes et décideurs publics portent souvent moins sur les mécanismes économiques eux-mêmes que sur les objectifs poursuivis. Une stratégie optimale du point de vue de la dette n'est pas nécessairement optimale du point de vue de l'activité économique, et réciproquement.

Le cadre proposé demeure volontairement simplifié. Plusieurs extensions apparaissent naturelles. Il serait notamment utile d'introduire des anticipations explicites, des taux d'intérêt endogènes, des effets non linéaires des multiplicateurs budgétaires, ainsi qu'une modélisation plus détaillée des réactions de la politique monétaire. Une autre extension prometteuse consisterait à intégrer des considérations distributives et des agents hétérogènes

afin d'étudier conjointement les effets macroéconomiques et redistributifs des consolidations budgétaires.

Malgré ces limites, le modèle fournit un cadre analytique simple et transparent permettant de comprendre les principaux arbitrages associés à la réduction de la dette publique. À ce titre, il constitue un complément utile aux modèles macroéconomiques plus complexes utilisés dans l'évaluation des politiques budgétaires.

## Références

- AIYAGARI, S. R. AND E. R. MCGRATTAN (1998) : “The Optimum Quantity of Debt,” *Journal of Monetary Economics*, 42, 447–469.
- AUCLERT, A., R. MATTHEW, AND L. STRANB (2025a) : “Micro Jumps, Macro Humps : Monetary Policy and Business Cycles in an Estimated HANK Model,” *Working Paper*.
- AUCLERT, A., T. PHILIPPON, AND X. RAGOT (2024) : “Quelle trajectoire pour les finances publiques françaises ?” *Note CAE*, 82.
- AUCLERT, A., M. ROGNLIE, AND L. STROBE (2025b) : “Fiscal and Monetary Policy with Heterogeneous Agents,” *Annual Review of Economics*, 17, 539–562.
- AUERBACH, A. AND Y. GORODNICHENKO (2012) : “Measuring the Output Responses to Fiscal Policy,” *American Economic Journal : Economic Policy*, 4, 1–27.
- BARRO, R. J. (1974) : “Are Government Bonds Net Wealth ?” *Journal of Political Economy*, 82, 1095–1117.
- BAXTER, M. AND R. G. KING (1993) : “Fiscal Policy in General Equilibrium,” *The American Economic Review*, 83, 315–334.
- BLANCHARD, O. (2019a) : “Public Debt and Low Interest Rates,” *American Economic Review*, 109, 1197–1229.
- (2019b) : “Public Debt and Low Interest Rates,” *American Economic Review*, 109, 1197–1229.
- BLANCHARD, O. J. AND D. LEIGH (2013) : “Growth Forecast Errors and Fiscal Multipliers,” *American Economic Review*, 103, 117–20.
- BODKIN, R., L. KLEIN, AND K. MARWAH (1991) : *A History of Macroeconometric Model-building*, E. Elgar.
- CHRISTIANO, L., M. EICHENBAUM, AND S. REBELO (2011) : “When Is the Government Spending Multiplier Large ?” *Journal of Political Economy*, 119, 78–121.
- FATAS, A. AND L. SUMMERS (2018) : “The Permanent Effects of Fiscal Consolidations,” *Journal of International Economics*, 112, 238–250.
- KAPLAN, G., B. MOLL, AND G. VIOLANTE (2018) : “Monetary Policy According to HANK,” *American Economic Review*, 3, 697–743.
- LEGRAND, F., A. MARTIN-BAILLON, AND X. RAGOT (2024) : “Should Monetary Policy Care About Redistribution ? Optimal Fiscal and Monetary Policy with Heterogeneous Agents,” Working paper, SciencesPo.
- LEGRAND, F. AND X. RAGOT (2025) : “Optimal Fiscal Policy with Heterogeneous Agents and Capital : Should We Increase or Decrease Public Debt and Capital Taxes ?” .
- RUDD, J. AND K. WHELAN (2007) : “Modeling Inflation Dynamics : A Critical Review of Recent Research,” *Journal of Money, Credit and Banking*, 39, 155–170.
- TIMBEAU, X., E. AURISSERGUES, AND E. HEYER (2022) : “La dette Publique au XXI<sup>e</sup> Siècle. Une analyse de la dynamique de la dette publique avec Debtwtach,” *Revue de l’OFCE*.
- WU, J. C. AND Y. XIE (2025) : “Unconventional monetary and fiscal policy,” *Review of Economic Dynamics*, 56, 101259.

## A Le modèle

Le modèle à trois équations comporte en fait deux équations comptables et une seule équation qui résume l'économie du modèle.

La première équation est la réécriture de la contrainte budgétaire de l'état.

Si  $Y_t^*$  est le PIB potentiel nominal, au prix courant  $P_t$

$$\begin{aligned} G_t + (1 + r_t^{app}) D_{t-1} &= T_t + D_t \\ \frac{G_t}{Y_t^*} + (1 + r_t^{app}) \frac{D_{t-1}}{Y_{t-1}^*} \frac{Y_{t-1}^*}{Y_t^*} &= \frac{T_t}{Y_t^*} + \frac{D_t}{Y_t^*} \\ \frac{G_t}{Y_t^*} + (1 + r_t^{app}) \frac{D_{t-1}}{Y_{t-1}^*} \frac{Y_{t-1}^*}{Y_t^*} &= \frac{T_t}{Y_t^*} + \frac{D_t}{Y_t^*} \end{aligned}$$

Si  $d_t = \frac{D_t}{Y_t^*}$ ,  $T_t - G_t = T_t^* - G_t^* + \epsilon(Y_t - Y_t^*)$ , où  $\epsilon$  est l'élasticité des taxes et dépenses aux fluctuations d'activité, alors

$$\frac{T_t - G_t}{Y_t^*} = \frac{T_t^* - G_t^*}{Y_t^*} + \epsilon OG_t = sps_t + \epsilon OG_t$$

avec les définitions  $sps_t := \frac{T_t^* - G_t^*}{Y_t^*}$  et  $OG_t := \frac{Y_t - Y_t^*}{Y_t^*}$ .

On a donc

$$d_t - d_{t-1} = \frac{r - g^*}{1 + g^*} d_{t-1} - sps_t - \epsilon OG_t$$

La seconde équation est la définition de l'impulsion budgétaire, qui est la variation du surplus structurel primaire.

$$-IB_t := sps_t - sps_{t-1}$$

Une IB négative signifie une augmentation du surplus structurel primaire.

Enfin, la dernière équation est l'équation qui résume l'économie du modèle

$$OG_t = \rho OG_{t-1} + mIB_t$$

## B Preuve de la Proposition 1

$$\begin{aligned}
d_T &= d_0 + \sum_{k=1}^T (-sps_k - \epsilon \times OG_k) \\
&= d_0 - \sum_{k=1}^T sps_k - \epsilon \sum_{k=1}^T OG_k \\
&= d_0 - Tsp_0 + \sum_{k=1}^T (T+1-k) IB_k - \epsilon \sum_{k=1}^T OG_k \\
&= d_0 - Tsp_0 + \sum_{k=1}^T (T+1-k) IB_k - \epsilon \sum_{k=1}^T OG_k
\end{aligned}$$

$$sps_t = sps_0 - \sum_{k=1}^t IB_k$$

$$sps_1 = sps_0 - IB_1$$

$$sps_2 = sps_1 - IB_2 = sps_0 - IB_1 - IB_2$$

$$sps_1 + sps_2 = 2sps_0 - IB_2 - 2IB_1$$

$$\sum_{k=1}^T sps_k = Tsp_0 - \sum_{k=1}^T (T+1-k) IB_k \quad (3)$$

Par conséquent

$$IB_t = \frac{1}{m} OG_t - \frac{\rho}{m} OG_{t-1}, t \geq 1$$

$$b_T = b_0 - Tsp_0 + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^T (T+1-k) (OG_k - \rho OG_{k-1}) - \epsilon \sum_{k=1}^T OG_k$$

On exprime la dette en fonction des IB :

$$\begin{aligned}
OG_t &= \rho OG_{t-1} + mIB_t \\
&= \rho(\rho OG_{t-2} + mIB_{t-1}) + mIB_t = \rho^2 OG_{t-2} + m(\rho IB_{t-1} + IB_t) \\
&= \rho^t OG_0 + m \sum_{k=1}^t \rho^{t-k} IB_k
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^t OG_k &= \sum_{k=1}^t \rho^k OG_0 + m \sum_{k=1}^t \sum_{i=1}^k \rho^{k-i} IB_i \\
&= \rho \frac{1-\rho^t}{1-\rho} OG_0 + m \sum_{k=1}^t \sum_{i=1}^k \rho^{k-i} IB_i \\
&= \rho \frac{1-\rho^t}{1-\rho} OG_0 + m \sum_{i=1}^t \left( \sum_{k=i}^t \rho^{k-i} \right) IB_i \\
&= \rho \frac{1-\rho^t}{1-\rho} OG_0 + m \sum_{i=1}^t \left( \sum_{k=0}^{t-i} \rho^k \right) IB_i \\
&= \rho \frac{1-\rho^t}{1-\rho} OG_0 + m \sum_{i=1}^t \left( \frac{1-\rho^{t-i+1}}{1-\rho} \right) IB_i \\
&= \rho \frac{1-\rho^t}{1-\rho} OG_0 + m \sum_{i=1}^t \frac{1}{1-\rho} IB_i - \frac{m}{1-\rho} \rho^{t+1} \sum_{i=1}^t \rho^{-i} IB_i \\
&= \rho \frac{1-\rho^t}{1-\rho} OG_0 + \frac{m}{1-\rho} \sum_{i=1}^t (1-\rho^{t+1-i}) IB_i
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^t sps_k = t \times sps_0 - \sum_{k=1}^t (t+1-k) IB_k \tag{4}$$

donc

$$d_t = d_{t-1} - sps_t - \epsilon \times OG_t$$

Pour  $t \leq T$

$$\begin{aligned}
d_t &= d_0 + \sum_{k=1}^t (-sps_k - \epsilon \times OG_k) \\
&= d_0 - \sum_{k=1}^t sps_k - \epsilon \sum_{k=1}^t OG_k \\
d_t &= d_0 - t * sps_0 + \sum_{k=1}^t (t+1-k) IB_k - \epsilon \left( \rho \frac{1-\rho^t}{1-\rho} OG_0 + \frac{m}{1-\rho} \sum_{k=1}^t (1-\rho^{t+1-k}) IB_k \right)
\end{aligned} \tag{5}$$

donc

$$\frac{\partial d_t}{\partial IB_k} = (t+1-k) - \epsilon \frac{m}{1-\rho} (1-\rho^{t+1-k})$$

Or

$$\frac{\partial d_{t+k}}{\partial IB_t} = k+1 - \epsilon \frac{m}{1-\rho} (1-\rho^{k+1}) = k + \epsilon \frac{m}{1-\rho} \rho^{k+1} + 1 - \epsilon \frac{m}{1-\rho}$$

On peut vérifier que le terme de droite est croissant en  $k$ , pour des valeurs pertinentes de paramètres.

## C Preuve de la Proposition 2

On peut calculer (comme  $IB_t = 0$  pour  $t \geq T+1$ .)

$$\max_{\{IB\}_{t \geq 1}} \sum_{t=1}^{\infty} OG_t = \max_{\{IB\}_{t \geq 1}} \sum_{t=1}^T OG_t + \frac{OG_{T+1}}{1-\rho}$$

avec

$$\sum_{k=1}^T IB_k = \Delta^{tot} < 0$$

Comme  $OG_t = \rho OG_{t-1} + m IB_t$ , on a,

$$OG_t = \rho^t OG_0 + m \left( \sum_{k=1}^t IB_k \rho^{t-k} \right)$$

Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^T OG_t + \frac{OG_{T+1}}{1-\rho} &= OG_0 \sum_{t=1}^T \rho^t + m \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^t IB_k \rho^{t-k} + \frac{\rho^{T+1}}{1-\rho} OG_0 + \frac{m \left( \sum_{k=1}^{T+1} IB_k \rho^{T+1-k} \right)}{1-\rho} \\
\frac{1}{m} \left( \sum_{t=1}^T OG_t + \frac{OG_T}{1-\rho} \right) &= \frac{1}{m} \frac{\rho}{1-\rho} OG_0 + IB_1 \left( \sum_{t=1}^T \rho^{t-1} \right) + IB_2 \left( \sum_{t=2}^T \rho^{t-2} \right) + IB_3 \left( \sum_{t=3}^T \rho^{t-3} \right) + \\
&\quad \dots + \frac{\sum_{k=1}^{T+1} IB_k \rho^{T+1-k}}{1-\rho} \\
&= \frac{1}{m} \frac{\rho}{1-\rho} OG_0 + \sum_{k=1}^T \left( \sum_{t=k}^T \rho^{t-k} \right) IB_k + \frac{\sum_{k=1}^{T+1} IB_k \rho^{T+1-k}}{1-\rho} = \sum_{k=1}^T \left( \sum_{t=0}^{T-k} \rho^t \right) IB_k \\
&\quad + \frac{\sum_{k=1}^T IB_k \rho^{T+1-k}}{1-\rho} \\
&= \frac{1}{m} \frac{\rho}{1-\rho} OG_0 + \sum_{k=1}^T \left( \frac{1-\rho^{T-k+1}}{1-\rho} \right) IB_k + \frac{\sum_{k=1}^T IB_k \rho^{T+1-k}}{1-\rho} \\
&= \frac{1}{m} \frac{\rho}{1-\rho} OG_0 + \sum_{k=1}^T \left( \frac{1}{1-\rho} \right) IB_k - \sum_{k=1}^T \frac{\rho^{T-k+1}}{1-\rho} IB_k + \sum_{k=1}^T \frac{\rho^{T+1-k}}{1-\rho} IB_k \\
&= \frac{1}{m} \frac{\rho}{1-\rho} OG_0 + \sum_{k=1}^T \left( \frac{1}{1-\rho} \right) IB_k \\
&= \frac{1}{m} \frac{\rho}{1-\rho} OG_0 + \frac{\Delta^{tot}}{1-\rho}
\end{aligned}$$

## D Preuve de la Proposition 3

Comme d'après 5,

$$d_t = d_0 - t * sps_0 + \sum_{k=1}^t (t+1-k) IB_k - \epsilon \left( \rho \frac{1-\rho^t}{1-\rho} OG_0 + \frac{m}{1-\rho} \sum_{k=1}^t (1-\rho^{t+1-k}) IB_k \right)$$

La preuve est réalisée par un argument de perturbation. 1

Comme  $\frac{\partial d_{t+k}}{\partial IB_t}$  est croissant en  $k$ , on sait que pour tout  $t$  et  $k \leq t$ ,

$$\frac{\partial d_t}{\partial IB_{k-1}} > \frac{\partial d_t}{\partial IB_k}$$

Donc pour une somme  $IB_{k-1} + IB_k$  donnée, la dette est plus faible en  $t$  pour le profil

$(IB_{k-1} - \epsilon) + (IB_k + \epsilon)$ . La perturbation marginale est donc de diminuer  $IB_{k-1}$  et de diminuer  $IB_k$ . Par récurrence, le profil de consolidation qui minimise la dette à tout horizon est celui qui réalise la consolidation la plus importante à la première période,  $IB_1 = \Delta^{tot}$ , et  $IB_{t \geq 2} = 0$ .

## E Preuve de la Proposition 4

Le problème est

$$\min_{\{IB_t\}_{t \geq 1}} \sum_{t=0}^{\infty} OG_t^2 + 2\kappa d_T$$

avec

$$\begin{aligned} OG_t &= \rho OG_{t-1} + m \times IB_t \\ sps_t - sps_{t-1} &= -IB_t \\ d_t - d_{t-1} &= -sps_t - \epsilon \times OG_t \\ \sum_{k=1}^T IB_k &= \Delta^{tot} \end{aligned}$$

### E.1 Expression de IB en fonction de OG

$$IB_t = \frac{1}{m} OG_t - \frac{\rho}{m} OG_{t-1}, t \geq 1$$

Donc la contrainte  $\sum_{k=1}^T IB_k = \Delta$  peut s'écrire

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^T (OG_k - \rho OG_{k-1}) &= m\Delta^{tot} \\ OG_T + \sum_{k=1}^{T-1} OG_k - \rho \sum_{k=1}^{T-1} OG_k - \rho OG_0 &= m\Delta^{tot} \\ (1 - \rho) \sum_{k=1}^{T-1} OG_k + OG_T &= m\Delta^{tot} + \rho OG_0 \end{aligned}$$

## E.2 Expression de la dette en fonction de OG

$$\sum_{k=1}^T sps_k = Tsp_0 - \sum_{k=1}^T (T + 1 - k) IB_k \quad (6)$$

$$\begin{aligned} d_T &= d_0 + \sum_{k=1}^T (-sps_k - \epsilon \times OG_k) \\ d_t &= d_0 - Tdp_0 + \sum_{k=1}^T (T + 1 - k) IB_k - \epsilon \sum_{k=1}^T OG_k \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} IB_t &= \frac{1}{m} OG_t - \frac{\rho}{m} OG_{t-1}, t \geq 1 \\ d_T &= d_0 - Tdp_0 + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^T (T + 1 - k) (OG_k - \rho OG_{k-1}) - \epsilon \sum_{k=1}^T OG_k \end{aligned}$$

### E.3 Expression du Lagrangien en fonction de OG

$$\min_{\{OG_t\}_{t \geq 1}} \sum_{t=0}^{\infty} OG_t^2 + 2\kappa \left( d_0 - Tsp s_0 + \frac{1}{m} \sum_{t=1}^T (T+1-t) (OG_t - \rho OG_{t-1}) - \epsilon \sum_{k=1}^T OG_t \right) - 2\lambda \left( (1-\rho) \sum_{t=1}^{T-1} OG_t + OG_T - (m\Delta + \rho OG_0) \right)$$

As  $IB_{T+k} = 0$  for  $k \geq 1$ ,  $OG_t = \rho^{t-T} OG_T$

$$\sum_{t=T+1}^{\infty} OG_t^2 = OG_T \sum_{t=T+1}^{\infty} (\rho^{t-T})^2 = OG_T \sum_{t=1}^{\infty} (\rho^2)^t = \rho^2 \frac{OG_T^2}{1-\rho^2}$$

Donc

$$\min_{\{OG_t\}_{t \geq 1}} \sum_{t=0}^T OG_t^2 + 2\kappa \left( d_0 - Tsp s_0 + \frac{1}{m} \sum_{t=1}^T (T+1-t) (OG_t - \rho OG_{t-1}) - \epsilon \sum_{k=1}^T OG_t \right) - 2\lambda \left( (1-\rho) \sum_{t=1}^{T-1} OG_t + OG_T - (m\Delta + \rho OG_0) \right) + \rho^2 \frac{OG_T^2}{1-\rho^2}$$

### E.4 Dérivation des conditions du premier ordre

$$t \leq T-1 : \lambda(1-\rho) = OG_t + \kappa \left( \frac{1}{m} (T+1-t) - \frac{1}{m} (T+1-(t+1)) \rho - \epsilon \right)$$

$$t = T : \lambda = OG_T + \frac{\rho^2}{1-\rho^2} OG_T + \kappa \left( \frac{1}{m} - \epsilon \right)$$

Donc

$$OG_t = (1-\rho) \lambda - \kappa \left( \frac{1-\rho}{m} (T-t) + \frac{1}{m} - \epsilon \right)$$

$$OG_T = (1-\rho^2) \lambda - (1-\rho^2) \kappa \left( \frac{1}{m} - \epsilon \right)$$

Détermination de la valeur de  $\lambda$ .

Comme

$$(1 - \rho) \sum_{t=1}^{T-1} OG_t + OG_T = m\Delta^{tot} + \rho OG_0$$

On trouve, après quelques calculs

$$\begin{aligned} \left(1 - \rho^2 + (1 - \rho)^2 (T - 1)\right) \lambda - (1 - \rho)^2 \kappa \frac{1}{m} \frac{T(T - 1)}{2} \\ - \left((1 - \rho)(T - 1) + (1 - \rho^2)\right) \frac{\kappa}{m} (1 - m\epsilon) = m\Delta^{tot} + \rho OG_0 \end{aligned}$$

Donc, la valeur du multiplicateur de Lagrange est

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{m\Delta^{tot} + \rho OG_0 + \left[\left((1 - \rho) \frac{T}{2} + 1 - m\epsilon\right) (1 - \rho)(T - 1) + (1 - \rho^2)(1 - m\epsilon)\right] \kappa \frac{1}{m}}{(1 - \rho)(2\rho + T(1 - \rho))} \\ &= \frac{m\Delta^{tot} + \rho OG_0}{(1 - \rho)(2\rho + T(1 - \rho))} + \frac{\left(\left((1 - \rho) \frac{T}{2} + 1 - m\epsilon\right) (T - 1) + (1 + \rho)(1 - m\epsilon)\right) \kappa \frac{1}{m}}{(2\rho + T(1 - \rho))} \end{aligned}$$

et les OG sont

$$\begin{aligned} OG_t &= \lambda(1 - \rho) - \kappa \frac{1 - \rho}{m} (T - t) - \kappa \left(\frac{1}{m} - \epsilon\right) \\ &= \lambda(1 - \rho) - \kappa \frac{1 - \rho}{m} (T - t + 1) - \kappa \left(\frac{1}{m} - \epsilon\right) + \kappa \frac{1 - \rho}{m} \\ &= OG_{t-1} + \kappa \frac{1 - \rho}{m} \\ OG_T &= \lambda(1 - \rho^2) - (1 - \rho^2) \kappa \left(\frac{1}{m} - \epsilon\right) \end{aligned}$$

## F Valeurs des instruments : IBs

La proposition suivante détaille la valeur des instruments.

**Proposition 6** *La politique optimale correspond aux impulsions.*

$$\begin{aligned}
t = 1 : IB_1 &= \frac{\Delta^{tot}}{2\rho + T(1 - \rho)} + \left( \frac{1}{2\rho + T(1 - \rho)} - 1 \right) \frac{\rho}{m} OG_0 + \frac{\kappa(1 - \rho)}{m^2} A \\
T - 1 \geq t \geq 1 : IB_t &= \frac{(1 - \rho) \Delta^{tot}}{2\rho + T(1 - \rho)} + \frac{1 - \rho}{2\rho + T(1 - \rho)} \frac{\rho}{m} OG_0 + (1 - \rho)^2 \frac{\kappa}{m^2} B + (1 - \rho)^2 \frac{\kappa}{m^2} t \\
t = T : IB_T &= \frac{1 - \rho(1 - \rho)}{(1 - \rho)(2\rho + T(1 - \rho))} \Delta^{tot} + \frac{1 - \rho(1 - \rho)}{(1 - \rho)(2\rho + T(1 - \rho))} \frac{\rho}{m} OG_0 + \frac{\kappa}{m^2} C
\end{aligned}$$

où  $A, B$  et  $C$  ne dépendent ni de  $\Delta, OG_0$  ou  $t$ .

On a

$$IB_t = \frac{1}{m} OG_t - \frac{\rho}{m} OG_{t-1}, t \geq 1$$

donc

$$\begin{aligned}
t = 1 : IB_1 &= \frac{1}{m} \left( \lambda(1 - \rho) - \kappa \frac{1 - \rho}{m} (T - t) - \kappa \left( \frac{1}{m} - \epsilon \right) \right) - \frac{\rho}{m} OG_0 \\
T - 1 \geq t \geq 1 : IB_t &= \frac{1}{m} \left( \lambda(1 - \rho) - \kappa \frac{1 - \rho}{m} (T - t) - \kappa \left( \frac{1}{m} - \epsilon \right) \right) \\
&\quad - \frac{\rho}{m} \left( \lambda(1 - \rho) - \kappa \frac{1 - \rho}{m} (T - t) - \kappa \left( \frac{1}{m} - \epsilon \right) \right), T - 1 \geq t \geq 1 \\
t = T : IB_T &= \frac{1}{m} \left( \lambda - \kappa \left( \frac{1}{m} - \epsilon \right) \right) - \frac{\rho}{m} \left( \lambda(1 - \rho) - \kappa \frac{1 - \rho}{m} - \kappa \left( \frac{1}{m} - \epsilon \right) \right) \\
t \geq T : IB_t &= 0
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
t = 1 : IB_1 &= \frac{1}{m} \left( \lambda(1 - \rho) - \kappa \frac{1 - \rho}{m} (T - 1) - \kappa \left( \frac{1}{m} - \epsilon \right) \right) - \frac{\rho}{m} OG_0 \\
T - 1 \geq t \geq 1 : IB_t &= \frac{1 - \rho}{m} \left( \lambda(1 - \rho) - \kappa \frac{1 - \rho}{m} (T - t + 1) - \kappa \left( \frac{1}{m} - \epsilon \right) \right) + \frac{\kappa}{m} \frac{1 - \rho}{m} \\
&= \frac{1 - \rho}{m} \left( \lambda(1 - \rho) - \kappa \frac{1 - \rho}{m} (T + 1) + \kappa \epsilon \right) + \left( \frac{1 - \rho}{m} \right)^2 \kappa t \\
&= \frac{1 - \rho}{m} (\lambda(1 - \rho)) - \frac{1 - \rho}{m} \kappa \left( \frac{1 - \rho}{m} (T + 1) - \epsilon \right) + \left( \frac{1 - \rho}{m} \right)^2 \kappa t \\
t = T : IB_T &= (1 - \rho(1 - \rho)) \frac{1}{m} \lambda + (1 - \rho) (\rho - 1 + m\epsilon) \frac{\kappa}{m} \frac{1}{m} \\
t \geq T : IB_t &= 0
\end{aligned}$$

Donc, après quelques calculs

$$\begin{aligned}
t = 1 : IB_1 &= \frac{\Delta^{tot}}{2\rho + T(1 - \rho)} + \left( \frac{1}{2\rho + T(1 - \rho)} - 1 \right) \frac{\rho}{m} OG_0 + \frac{\kappa(1 - \rho)}{m^2} A \\
T - 1 \geq t \geq 1 : IB_t &= \frac{(1 - \rho) \Delta^{tot}}{2\rho + T(1 - \rho)} + \frac{1 - \rho}{2\rho + T(1 - \rho)} \frac{\rho}{m} OG_0 + (1 - \rho)^2 \frac{\kappa}{m^2} B + (1 - \rho)^2 \frac{\kappa}{m^2} t \\
t = T : IB_T &= \frac{1 - \rho(1 - \rho)}{(1 - \rho)(2\rho + T(1 - \rho))} \Delta^{tot} + \frac{1 - \rho(1 - \rho)}{(1 - \rho)(2\rho + T(1 - \rho))} \frac{\rho}{m} OG_0 + \frac{\kappa}{m^2} C \\
t \geq T : IB_t &= 0
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
A &:= \frac{\left( (1 - \rho) \frac{T}{2} + 1 - m\epsilon \right) (T - 1) + (1 + \rho) (1 - m\epsilon)}{2\rho + T(1 - \rho)} - (T - 1) - \frac{1}{1 - \rho} (1 - m\epsilon) \\
B &:= \frac{(1 - \rho) \frac{T}{2} (T - 1) + (1 - m\epsilon) (T + \rho)}{2\rho + T(1 - \rho)} - (T + 1) - \frac{m}{1 - \rho} \epsilon \\
C &:= (1 - \rho(1 - \rho)) \frac{\left( (1 - \rho) \frac{T}{2} + 1 - m\epsilon \right) (T - 1) + (1 + \rho) (1 - m\epsilon)}{2\rho + T(1 - \rho)} + (1 - \rho) (\rho - 1 + m\epsilon)
\end{aligned}$$

## F.1 cas où $\rho = 0$

$$\begin{aligned} OG_t &= \lambda - \kappa \left( \frac{1}{m} (T - t) + \frac{1}{m} - \epsilon \right) \\ OG_T &= \lambda - \kappa \left( \frac{1}{m} - \epsilon \right) \end{aligned}$$

Les  $OG_t$  sont maintenant continu en  $T$ .

Détermination de la valeur de  $\lambda$ .

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{m\Delta^{tot} + \rho OG_0 + \left[ \left( (1 - \rho) \frac{T}{2} + 1 - m\epsilon \right) (1 - \rho) (T - 1) + (1 - \rho^2) (1 - m\epsilon) \right] \kappa \frac{1}{m}}{(1 - \rho) (2\rho + T (1 - \rho))} \\ &= \frac{m\Delta^{tot}}{T} + \frac{\left( \frac{T}{2} + 1 - m\epsilon \right) (T - 1) + (1 - m\epsilon)}{T} \kappa \frac{1}{m} \\ &= \frac{m\Delta^{tot}}{T} + \frac{\left( \frac{T}{2} - m\epsilon \right) T + \frac{T}{2}}{T} \kappa \frac{1}{m} \\ &= \frac{m\Delta^{tot}}{T} + \left( \frac{T}{2} - m\epsilon \right) \kappa \frac{1}{m} + \frac{1}{2} \kappa \frac{1}{m} = \frac{m\Delta^{tot}}{T} + \frac{T + 1}{2} \kappa \frac{1}{m} - \epsilon \kappa \end{aligned}$$

et les OG sont  $t \geq T$

$$\begin{aligned} OG_t &= \frac{m\Delta^{tot}}{T} + \frac{T + 1}{2} \kappa \frac{1}{m} - \frac{\kappa}{m} (T + 1 - t) \\ &= \frac{m\Delta^{tot}}{T} + \frac{\kappa}{m} \left( t - \frac{T + 1}{2} \right) \end{aligned}$$

## G Preuve de la Proposition 5

Définissons  $\theta := \frac{1+r}{1+g}$ . le programme est

$$\min_{\{IB_t\}_{t \geq 1}} \sum_{t=0}^{\infty} OG_t^2 + 2\kappa d_T$$

avec

$$OG_t = \rho OG_{t-1} + m \times IB_t$$

$$sps_t - sps_{t-1} = -IB_t$$

$$d_t = \theta d_{t-1} - sps_t - \epsilon \times OG_t$$

$$\sum_{k=1}^T IB_k \Delta^{tot}$$

## G.1 Expression de IB en fonction de OG

Comme dans la section précédente,

$$IB_t = \frac{1}{m} OG_t - \frac{\rho}{m} OG_{t-1}, t \geq 1$$

Donc la contrainte  $\sum_{k=1}^T IB_k = \Delta$  peut s'écrire

$$(1 - \rho) \sum_{k=1}^{T-1} OG_k + OG_T = m \Delta^{tot} + \rho OG_0$$

## G.2 Expression de la dette en fonction de OG

On a

$$d_t = \theta d_{t-1} - sps_t - \epsilon \times OG_t$$

$$d_t = \theta^{t-1} d_0 - \sum_{k=0}^{t-1} \theta^k sps_{t-k} - \epsilon \sum_{k=0}^{t-1} OG_{t-k}$$

De  $sps_t - sps_{t-1} = -IB_t$ , on a (avec la notation  $\sum_{k=1}^0 x_k = 0$ )

$$sps_t = sps_0 - \sum_{k=1}^t IB_k$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{t-1} \theta^k sps_{t-k} &= \sum_{k=0}^{t-1} \theta^k \left( sps_0 - \sum_{i=1}^{t-k} IB_i \right) \\
&= \sum_{k=0}^{t-1} \theta^k sps_0 - \sum_{k=0}^{t-1} \theta^k \sum_{i=1}^{t-k} IB_i \\
&= \frac{1-\theta^t}{1-\theta} sps_0 - \sum_{k=0}^{t-1} \theta^k \sum_{i=1}^{t-k} IB_i \\
&= \frac{1-\theta^t}{1-\theta} sps_0 \\
&\quad - \left( \sum_{i=1}^t IB_i \right) - \theta \left( \sum_{i=1}^{t-1} IB_i \right) - \theta^2 \left( \sum_{i=1}^{t-2} IB_i \right) - \dots - \theta^{t-2} \left( \sum_{i=1}^2 IB_i \right) - \theta^{t-1} \left( \sum_{i=1}^1 IB_i \right) \\
&= \frac{1-\theta^t}{1-\theta} sps_0 \\
&\quad - IB_1 (1-\theta-\dots-\theta^{t-1}) - IB_2 (1-\theta-\dots-\theta^{t-2}) - IB_3 (1-\theta-\dots-\theta^{t-2}) \\
&\quad - IB_{t-2} (1-\theta-\theta^2) - IB_{t-1} (1-\theta) - IB_t \\
&= \frac{1-\theta^t}{1-\theta} sps_0 - \sum_{k=1}^t IB_k \sum_{i=0}^{t-k} \theta^i \\
\sum_{k=0}^t \theta^k sps_{t-k} &= \frac{1-\theta^t}{1-\theta} sps_0 - \sum_{k=1}^t IB_k \frac{1-\theta^{t-k+1}}{1-\theta}
\end{aligned}$$

Donc

$$d_t = \theta^{t-1} d_0 - \frac{1-\theta^t}{1-\theta} sps_0 + \sum_{k=1}^t IB_k \frac{1-\theta^{t-k+1}}{1-\theta} - \epsilon \sum_{k=0}^{t-1} OG_{t-k}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
IB_t &= \frac{1}{m} OG_t - \frac{\rho}{m} OG_{t-1}, t \geq 1 \\
d_t &= \theta^{t-1} d_0 - \frac{1-\theta^t}{1-\theta} sps_0 + \sum_{k=1}^t \frac{1-\theta^{t-k+1}}{1-\theta} \left( \frac{1}{m} OG_k - \frac{\rho}{m} OG_{k-1} \right) - \epsilon \sum_{k=0}^{t-1} OG_{t-k} \\
d_T &= \theta^{T-1} d_0 - \frac{1-\theta^T}{1-\theta} sps_0 + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^T \frac{1-\theta^{T-k+1}}{1-\theta} (OG_k - \rho OG_{k-1}) - \epsilon \sum_{k=1}^T OG_k
\end{aligned}$$

Avant, on avait

$$d_T = d_0 - Tsp s_0 + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^T (T+1-k) (OG_k - \rho OG_{k-1}) - \epsilon \sum_{k=1}^T OG_k$$

C'est la même chose car on a  $\lim_{\theta \rightarrow 1} \frac{1-\theta^x}{1-\theta} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1-(1-\epsilon)^x}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1-e^{x \log(1-\epsilon)}}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1-e^{-\epsilon x}}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1-(1-\epsilon x)}{\epsilon} = x$

### G.3 Expression du Lagrangien en fonction de OG

$$\begin{aligned} \min_{\{OG\}_{t \geq 1}} & \sum_{t=0}^{\infty} OG_t^2 + 2\kappa \left( \theta^{T-1} d_0 - \frac{1-\theta^T}{1-\theta} sp s_0 + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^T \frac{1-\theta^{T-k+1}}{1-\theta} (OG_k - \rho OG_{k-1}) - \epsilon \sum_{k=1}^T OG_k \right) \\ & - 2\eta \left( (1-\rho) \sum_{t=1}^{T-1} OG_t + OG_T - (m\Delta^{tot} + \rho OG_0) \right) \end{aligned}$$

comme  $IB_{T+k} = 0$  pour  $k \geq 1$ ,  $OG_t = \rho^{t-T} OG_T$

$$\sum_{t=T+1}^{\infty} OG_t^2 = OG_T \sum_{t=T+1}^{\infty} (\rho^{t-T})^2 = OG_T \sum_{t=1}^{\infty} (\rho^2)^t = \rho^2 \frac{OG_T^2}{1-\rho^2}$$

Donc

$$\begin{aligned} \min_{\{OG\}_{t \geq 1}} & \sum_{t=0}^T OG_t^2 + 2\kappa \left( \theta^{T-1} d_0 - \frac{1-\theta^T}{1-\theta} sp s_0 + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^T \frac{1-\theta^{T-k+1}}{1-\theta} (OG_k - \rho OG_{k-1}) - \epsilon \sum_{k=1}^T OG_k \right) \\ & - 2\eta \left( (1-\rho) \sum_{t=1}^{T-1} OG_t + OG_T - (m\Delta^{tot} + \rho OG_0) \right) + \rho^2 \frac{OG_T^2}{1-\rho^2} \end{aligned}$$

## G.4 Dérivation des conditions du premier ordre

$$\begin{aligned}
 t \leq T - 1 : \eta(1 - \rho) &= OG_t + \kappa \left( \frac{1}{m} \frac{1 - \theta^{T-t+1}}{1 - \theta} - \frac{1}{m} \frac{1 - \theta^{T-t}}{1 - \theta} \rho - \epsilon \right) \\
 t = T : \eta &= OG_T + \frac{\rho^2}{1 - \rho^2} OG_T + \kappa \left( \frac{1}{m} - \epsilon \right)
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 OG_t &= (1 - \rho) \eta - \frac{\kappa}{m(1 - \theta)} (1 - \rho - m(1 - \theta) \epsilon) + \kappa \frac{\theta - \rho}{m(1 - \theta)} \theta^{T-t} \\
 OG_T &= (1 - \rho^2) \left( \eta - \kappa \left( \frac{1}{m} - \epsilon \right) \right)
 \end{aligned}$$

Détermination de la valeur de  $\eta$ .

On a

$$(1 - \rho) \sum_{t=1}^{T-1} OG_t + OG_T = m\Delta^{tot} + \rho OG_0$$

On trouve, après quelques calculs

$$\begin{aligned}
 & \left( 1 - \rho^2 + (1 - \rho)^2 (T - 1) \right) \eta + (1 - \rho) (\theta - \rho) \frac{\kappa}{m(1 - \theta)} \theta \frac{1 - \theta^{T-1}}{1 - \theta} \\
 & - (1 - \rho) \frac{\kappa}{m(1 - \theta)} (1 - \rho - m(1 - \theta) \epsilon) (T - 1) \\
 & - \left( 1 - \rho^2 \right) \frac{\kappa}{m} (1 - m\epsilon) = m\Delta^{tot} + \rho OG_0
 \end{aligned}$$

Donc, la valeur du multiplicateur de Lagrange est

$$\eta = \frac{m\Delta^{tot} + \rho OG_0}{(1-\rho)(2\rho + T(1-\rho))} + \frac{(1-\rho - m(1-\theta)\epsilon)(T-1) + (1-\theta)(1+\rho)(1-m\epsilon) - (\theta-\rho)\theta\frac{1-\theta^{T-1}}{1-\theta}}{(2\rho + T(1-\rho))} \frac{1}{1-\theta} \frac{\kappa}{m}$$





## ABOUT OFCE

---

The Paris-based Observatoire français des conjonctures économiques (OFCE), or French Economic Observatory is an independent and publicly-funded centre whose activities focus on economic research, forecasting and the evaluation of public policy.

Its 1981 founding charter established it as part of the French Fondation nationale des sciences politiques (Sciences Po) and gave it the mission is to “ensure that the fruits of scientific rigour and academic independence serve the public debate about the economy”. The OFCE fulfils this mission by conducting theoretical and empirical studies, taking part in international scientific networks, and assuring a regular presence in the media through close cooperation with the French and European public authorities. The work of the OFCE covers most fields of economic analysis, from macroeconomics, growth, social welfare programmes, taxation and employment policy to sustainable development, competition, innovation and regulatory affairs.

## ABOUT SCIENCES PO

---

Sciences Po is an institution of higher education and research in the humanities and social sciences. Its work in law, economics, history, political science and sociology is pursued through [ten research units](#) and several crosscutting programmes.

Its research community includes over [two hundred twenty members](#) and [three hundred fifty PhD candidates](#). Recognized internationally, their work covers [a wide range of topics](#) including education, democracies, urban development, globalization and public health.

One of Sciences Po's key objectives is to make a significant contribution to methodological, epistemological and theoretical advances in the humanities and social sciences. Sciences Po's mission is also to share the results of its research with the international research community, students, and more broadly, society as a whole.

## PARTNERSHIP

---